

Monografías

Fundamentos de la Física 4

Introducción a los Fractales

Omayra Pérez
Bernardo Fernández

Cuaderno 4



Primera Edición, 2018.
Monografía. Cuaderno de Enseñanza de la Física 4.

Se tienen los derechos de autor.
Sin embargo, se autoriza la reproducción sin fines de lucro (gratuita) con objetivos educativos. Es suficiente con informar a la autora.

Editor: Omayra Pérez
Julio, 2018
Libro Editado en entorno Mac
Programa utilizado para la edición: Adobe InDesign CS5.
Las fotos que aparecen en el texto: Omayra Pérez

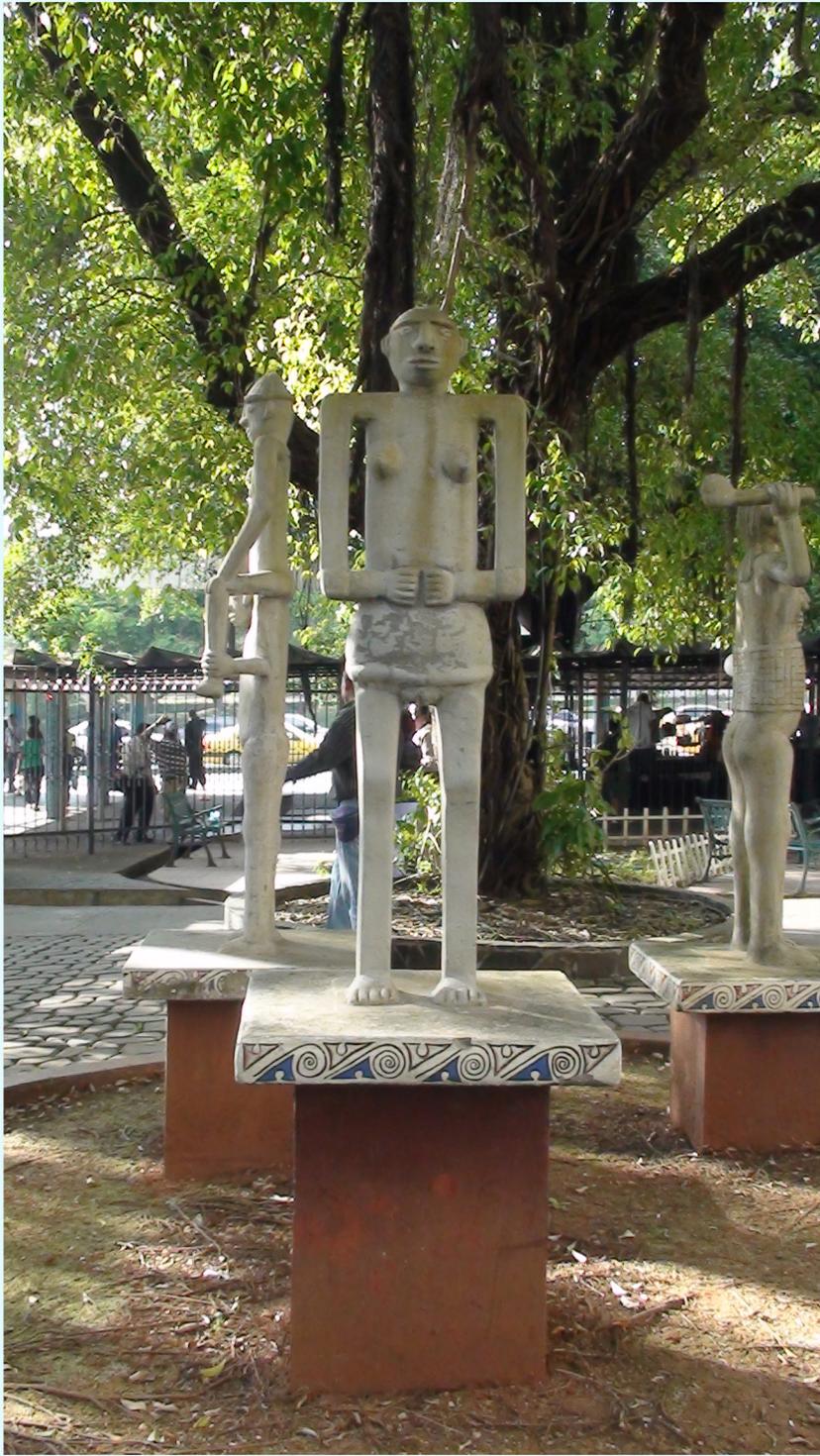
Introducción a los Fractales
Omayra Pérez y Bernardo Fernández

Estación RN50
Estacionrn50@gmail.com
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología.
Universidad de Panamá



CONTENIDO

1.	Introducción.	9
2.	Medir.	11
3.	Transiciones de Fase.	18
	3.1 Clasificación de las transiciones de fases según Ehrenferst	20
	3.2 Cambios de Fase de Primer Orden.	21
	3.3 Cambios de Fase de Segundo Orden.	22
	3.4 Exponente Crítico.	25
	3.5 El paso líquido - vapor en un fluido cualquiera para la Termodinámica (modelo fenomenológico).	26
	3.6. Diagramas de las isothermas.	27
4.	Cambio de simetría.	30
5.	Relación entre los exponentes críticos.	32
6.	Invariancia de escala o hipótesis de escalamiento	33
7.	Funciones homogéneas generalizadas.	34
8.	Escalamiento de fluidos.	36
9.	Los principios de la teoría del caos.	37
10.	El caos, término que está al origen del surgimiento de una teoría diferente a la antes conocida.	38
11.	La dimensión fractal.	43
12.	La belleza infinita de los fractales.	48
13.	Conclusiones y recomendaciones.	49
14.	Referencias bibliográficas.	51







1. INTRODUCCIÓN

La naturaleza presenta los objetos y su comportamiento en innumerables formas, figuras, en diferentes dinámicas, etc., de las cuales muchas pasan desapercibidas para los universitarios y más aún para nuestra conciencia de ciudadano común.

En otros tiempos, para los físicos fueron retos resolver enigmas como, por ejemplo, ¿cuál es la naturaleza del espín? ¿Cómo aprovechar la energía solar? Explicar la formación de las nubes, encontrar los factores que determinan la evolución de la atmósfera, establecer la composición óptima del suelo para un cultivo específico, identificar las características de los materiales para usarlos con un objetivo particular, etc. La incursión en los diversos campos de la Física para resolver esos retos, con las herramientas eficientes a las cuales tenemos hoy día acceso, se ha conseguido por la continua elaboración y modernización de nuestros modelos gracias a las mejorías logradas en los sistemas de estudios científicos y haciendo uso de sus aplicaciones a la tecnología. Sin embargo, hay conceptos que están siempre presentes y, son insoslayables, porque nunca serán completamente resueltos, ya que su comprensión es inagotable. Uno de ellos es el concepto de medición. A medida que el tiempo pasa se modifica lo que queremos indicar con los conceptos asociados a la actividad de medir. Al finalizar esta monografía le pedimos que se pregunten si medir todavía es para ustedes, solamente, comparar con un patrón.

La Ciencia está en una constante renovación de sus modelos teóricos y métodos experimentales o mejorando aquellos que no han tenido tanto desarrollo debido a la forma en que fueron formulados desde un principio; estos cambios llevan a analizar, entre otras cosas, los conceptos que se utilizaron en esa formulación y el avance de la tecnología.

Podemos mencionar, entre otros el de medición o el de las transiciones de fase; procesos que, por lo general, vemos en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, el cambio de líquido a sólido de algunos alimentos en un congelador y el agua evaporándose cuando se preparan los alimentos en nuestras cocinas, son transiciones de fase; estos fenómenos se convierten en parte corriente de nuestras vidas, sin conocer a fondo lo que eso implica.

El comportamiento de materiales a diversas temperaturas, entre ellos los cambios de fases, se plasman en los diagramas de fase, los cuales son muy útiles y pueden ser utilizados



en diversas aplicaciones.

Pero, está en nuestras manos utilizar herramientas científicas para estudiar algunos aspectos de estos fenómenos que llaman nuestra atención y para ello debemos tener una base por donde comenzar a explicarlos. Muchas de las propiedades macroscópicas son la expresión de parámetros microscópicos. Y es allí cuando el poder del conocimiento nos lleva a tomar conciencia de lo importante en que se convierte la claridad en la formulación de los objetivos de disciplinas como la Termodinámica y la Física Estadística, ramas de la Física que estudian sistemas complejos, entre ellos los cambios de fase. La Termodinámica que estudia los sistemas desde una perspectiva macroscópica está ligada a la Física Estadística ya que esta última trata de asociar esas variables macroscópicas a valores promedios (y de manera crítica nos preguntamos ¿cómo se obtienen?) de los parámetros que caracterizan a los componentes de los sistemas (con un número muy grande de grados de libertad). La naturaleza y manera como se ordenan, asocian, etc. los componentes, está a la base de lo que llamamos fases del sistema y un cambio de una fase a otra, es dependiente del tipo de estadística que se debe asociar a los componentes. Sin embargo, se trata de conocer ¿en qué aspectos hay universalidad de los sistemas? De allí se deduce que es necesario la constante revisión y modernización de los planes de estudio de estas disciplinas.

10

Este trabajo es un intento para lograr que estudiantes e incluso profesores interesados, tomen conciencia de cómo va cambiando rápidamente una disciplina, dando posibilidades de tener otros puntos de vista sobre ¿cómo funciona la ciencia? Presentamos diversos conceptos que debemos mejorar, no por ser errados sino, por tener una dinámica de cambio muy activa.



2. MEDIR

El concepto moderno de medición nació por dos vías, por un lado, a través de la Física y por el otro por la senda de la Matemática. Al respecto, veamos cómo la Física hereda una problemática histórica. Desde el inicio de su existencia, el hombre sintió la necesidad de categorizar los objetos de su ambiente y para ello debió identificar variables (magnitudes). Y al tratar de transmitir cierta información sobre los objetos, a los demás miembros de la sociedad, el ser humano entendió la importancia de utilizar una magnitud del mismo tipo como patrón. Toda esa problemática lleva subyacente muchas interrogantes que el hombre ha tratado de resolver poco a poco. Entre ellos podemos mencionar identificar las cualidades del patrón, la calidad del proceso de medición y la confiabilidad sobre el resultado obtenido con él.

La medición, que clásicamente se entiende como comparación entre magnitudes de la misma especie, de las cuales una se toma como patrón o referencia, se puede clasificar en primera instancia, en dos tipos, una cualitativa y otra cuantitativa. La primera se refiere a identificar una cualidad común entre los objetos que se van a comparar, tomando en cuenta que tal cualidad debe tener un orden de jerarquía usando un conjunto isomorfo a los números enteros, es decir, una clasificación ordenada de los atributos que se están estudiando, por ejemplo, colores, etc. Las comparaciones cuantitativas (que implican a \mathbf{R}) se utilizaron para lograr confiabilidad, reproductibilidad y trazabilidad. La confiabilidad forma parte de la solución de conflictos. Por ejemplo, cuando se suscitaban guerras territoriales, la medición confiable de las fronteras territoriales podía bajar el tono de las hostilidades. La reproductibilidad es una propiedad que la producción mercantil exige para poder garantizar la calidad del producto que se ofrece, eso implica la existencia de un patrón universal. La trazabilidad consiste en establecer una cadena ininterrumpida de comparaciones con patrones establecidos, generalmente nacionales o internacionales, y que garantizan que cualquier variación en los resultados está controlada. La vida con “*calidad total*” es cada vez más exigente de la trazabilidad ya que la calidad no solo debe buscarse en el producto sino en todas las funciones de la organización en la elaboración de la mercancía. Se entiende que el resultado de la medición cuantitativa (medición de ahora en adelante) es el mejor estimado del valor del mesurando. Contiene cifras seguras y una o dos cifras dudosas. Durante el proceso de la medición hay dispersión en los resultados que conduce a incertidumbre que puede ser evaluada. Esta dispersión proviene de distintos efectos, por ejemplo, de los sistemáticos que están asociados a los componentes, al método o a los patrones de referencia. Disminuir



los efectos sistemáticos tomando calidad/precio como elemento a optimizar, es la consigna. Otras dispersiones son de origen aleatorio. En este caso puede referirse a dispersiones por falta de información y otras tienen su origen en efectos aleatorios intrínsecos al fenómeno.

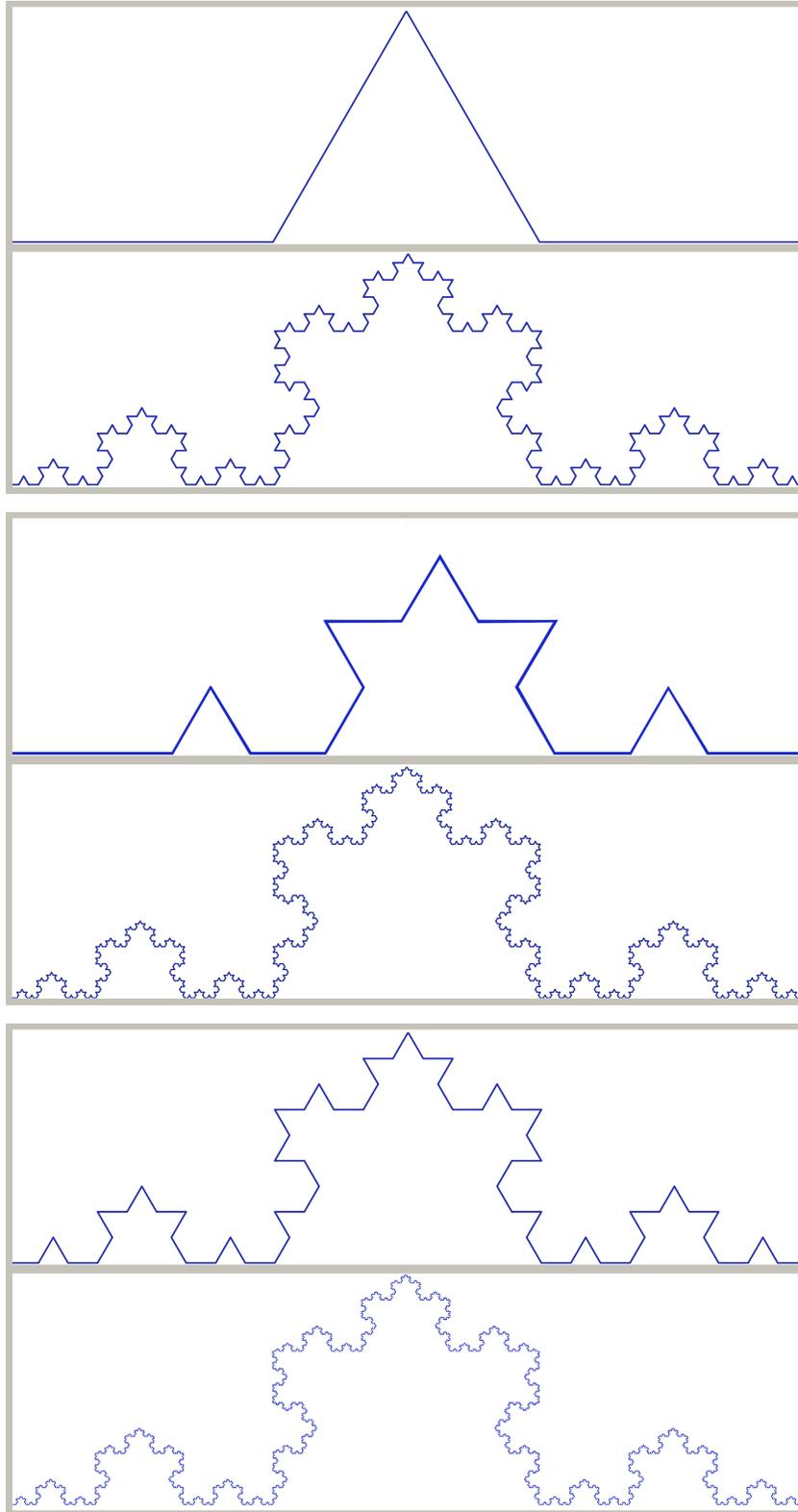
Por otro lado, la Matemática inicialmente introdujo la noción de medición plasmada en el concepto de búsqueda de la tangente a una función en un punto, pero ligada a tres simetrías, la de cambio de escala y las de traslación/rotación. Se trata del cálculo diferencial e integral. El comparar dos magnitudes (M), una de ellas tomada como patrón (p), nos permite suponer que podemos hacer cada vez más pequeño el patrón. En efecto, al intentar ser precisos, que significa hacer tender a cero el sobrante ε , del resultado de la comparación entre M y p (M/p da un número entero pero que puede ser real), $M = \sum p_i + \varepsilon$, debemos hacer el patrón cada vez más pequeño o sea p infinitamente pequeño, tanto como queramos (y nos prejuiciamos pretendiendo que se puede hacer de una sola forma) y teselamos o cubrimos el segmento M a medir, con el patrón escogido. Llegamos al límite (infinitesimalmente pequeño), $p_i \rightarrow dx$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, suponiendo que hay solamente un tipo de infinitesimalmente pequeño (adoquín) por cada dimensión (que suponemos entera) del espacio (línea, superficie, volumen). Y si en el límite una acción es la inversa de la otra $\int d = \text{Identidad}$, entonces $M = x$, un número real.

12

Lo anterior lo aceptamos de manera acrítica, por ejemplo, suponemos que las propiedades, incluso la de dimensionalidad del espacio, no son alteradas durante el proceso de paso al límite. Así, un segmento unidimensional lo imaginamos infinitamente estrecho, sin embargo, en la realidad tiene un espesor muy pequeño, o bien ¿qué ocurre si tiene una pequeña (o incluso infinitesimal) curvatura a todos los niveles o escalas? Eso nos saca de la uni-dimensionalidad e invadimos, aunque sea infinitesimalmente, otra(s) dimensiones. Lo anterior lo podemos pensar de manera sistemática como es el caso de la curva de Koch (figura 1), que para elaborar el patrón, se toma un segmento, se le divide en tres partes iguales y el tercio central se “estira” para formar un triángulo isósceles y eso hasta el infinito; se tiene un infinitamente pequeño, no recto, que al teselar, se suma hasta que se tiene una línea, no recta y se supone a priori, unidimensional, pero hay que medirla, y al hacerlo no obtenemos una dimensión espacial de uno sino de 1,26, ya que no es recta en ningún intervalo.

Igualmente, suponemos que podemos obtener el infinitamente pequeño patrón, mediante el mecanismo de restar a un segmento una tercera parte central hasta lo infinitesimal, como es el caso de la curva de Cantor. Al sumar los segmentos no obtenemos por recubrimiento la uni-dimensionalidad de la recta sino 0,63.





13

Fig. 1. La curva de Koch.

En el límite, llamamos integrar a obtener el todo (cubrir o teselar) a partir de la suma infinita de las partes infinitesimales y lo anterior tiene como propiedad aceptada, a priori, que el todo es la suma de las partes (infinitesimales), y se logra por traslación (de vecindad en vecindad) del elemento de base, para comparar la magnitud con el patrón de la misma especie. Si la traslación no altera las características del patrón, ni de la vecindad, y, además, la cubre toda, suponemos que existe una función que representa el todo. Clásicamente suponemos que esta función, y lo erigimos en forma de Ley, puede ser de corte clásica (función analítica) o de tipo probabilístico. El expresar matemáticamente lo que acabamos de señalar permitió definir el concepto de integral hoy clásica, desde la de Riemann hasta la llamada medida de Lebesgue. En el camino hacia la construcción de esta última, primero se reconsideró la noción inicial de integral porque trastocaba ese concepto de patrón clásico. Por ejemplo, se extendió el concepto de medida porque aparecieron patrones no clásico como la llamada medida (o patrón) de Dirac $d\mu = \delta(x)dx$, (producto de un infinitamente grande sin vecindad $\delta(x)$), por un infinitamente pequeño pero de igual dinámica de variación hacia lo infinito, por lo que del producto obtenemos un punto (sin dimensión o vecindad) y significa que nos acercamos a la pendiente $\delta(x)$, para ir al infinito, de dos formas diferentes (delta es la pendiente del escalón de Heaviside), pero controlada, por la derecha y por la izquierda, como lo hacemos con un escalón al subir o al bajar. Como ejemplo de aplicación concreta de lo anterior, tenemos la onda cuadrada vista como si fuera una función clásica y parcialmente genera problemas porque tiene pendientes infinitas (\pm) (aunque numerables) cada cierto intervalo y, sin embargo, representa un fenómeno común, como, por ejemplo, un interruptor que se abre y cierra con regularidad. Es el caso similar de una escalera. La distribución $\delta(x)$, representa a un fenómeno clásico y natural, describe bien el fenómeno escalón. Esto nos enseña que, si la dimensionalidad del objeto no puede expresarse a través de un concepto clásico de patrón de longitud, de superficie o de volumen (e incluso de dimensión cero que es la dimensión de un punto, y permite extender la noción de función a la de distribución), entonces debemos regresar y definir matemáticamente el concepto mismo de dimensión de espacio (repetimos en el caso de la delta de Dirac habíamos hecho gala de un prejuicio epistemológico y para resolverlo regresamos al concepto de patrón de medición). Ahora si suponemos que las dimensiones de espacio deben ser enteras, regresemos a lo que el físico se pregunta ¿Cómo medir longitudes, superficies o volúmenes de manera directa? Primero, debemos tener acceso a una longitud, superficie o volumen patrón. Una alternativa es usar patrones llamados adoquines. Las formas de los adoquines patrones se deben adaptar a la forma general de la magnitud que se va a medir, es decir tomar en cuenta su simetría, para poder recubrirlo todo o teselarlo. Aquí vale la pena hacer una aclaración, no siempre los adoquines

se acomodan a la vecindad para llenar (teselar o cubrir) el sistema (decimos teselar el espacio, o recubrimiento universal) como es el caso de los pentágonos regulares convexos que no permiten llenar el plano (nota, hasta ahora, ningún n -gonos convexo para $n \geq 7$, puede teselar el plano), sin embargo, todo triángulo o polígono convexo de cuatro lados tesela el plano, así como las tres clases de hexágonos especiales que también lo teselan. Para disminuir la dispersión, se deben utilizar adoquines que tengan la forma de la longitud, superficie o del volumen que se desea medir y/o se adapten a la vecindad. Ese es el caso de los 16 pentágonos irregulares convexos conocidos que si llenan el plano. Haciendo el adoquín cada vez más pequeño suponemos que nos acercaremos cada vez más al valor “verdadero” o llenado (teselado). Sin embargo, para ciertas situaciones la experiencia nos revela algo asombroso. No se obtiene la reproductibilidad de la medición, no se disminuye la dispersión. Al medir, algunas veces nos encontramos que, por ejemplo, con un adoquín (regla) patrón de longitud de un kilómetro obtendrá una longitud L y si volvemos a medir, pero muchas veces, con una regla patrón de un metro de longitud, mil veces más pequeño, el valor de esta medición no es igual a mil veces la longitud L medida con el adoquín patrón de un kilómetro. Si analizamos lo que ocurre podemos decir que, a medida que disminuye el patrón, el resultado de la medición crece y cuando el patrón corresponde a una longitud infinitesimal el resultado de la medición se hace infinito o diverge (¿a cuál infinito?), es decir, no existe la magnitud M expresada como producto de la medición clásica.

15

Sin embargo, hay formas cuya magnitud total M diverge, pero mostrando cierta regularidad, a otro nivel, y sugirió que este resultado asombroso puede aparecer con sentido al ser graficado en papel denominado logarítmico–logarítmico y nos admiramos de lo que nos revela el gráfico como resultado de la medición, en función del tamaño del patrón. Recordemos que el físico busca regularidades en la naturaleza. Y se encuentra una regularidad en el gráfico: se trata de la constancia de la pendiente. No existe una cantidad clásica como resultado de la medición, invariable para todos los observadores (asociados a los patrones), pero existe una constante válida para todos; la pendiente de la recta que aparece en el gráfico, en papel *logarítmico–logarítmico*.

Deseamos reproductibilidad al medir, por lo tanto, tenemos que conseguir un invariante y en este caso es la pendiente del gráfico. Podemos resumir lo anterior diciendo que, para medir este tipo de objetos, no basta con comparar la magnitud con un patrón de dimensión fija, es necesario obtener, en este caso concreto, en papel logarítmico - logarítmico, la pendiente de la recta, que resulta de graficar la magnitud versus los distintos tamaños del patrón



escogido. Esto garantiza una propiedad invariante del objeto para todo observador o físico, sea la escala que sea en la que se encuentre. Para todo aparato o patrón de medición, y en consecuencia para todo observador, esta es la pendiente de la recta o dicho de otro modo el exponente de la relación $M = A\varepsilon^{-\rho}$. Esta relación es válida cualquiera que sea el valor real, fijo, del exponente: ρ , y no nos asombra que sea negativo, pues con eso se garantiza la invariancia de M .

Los matemáticos introducen el concepto de distancia d entre dos puntos (que es una noción topológica o de vecindad). En las definiciones métricas clásicas siempre hay un pasaje al límite $d \rightarrow 0$, que no presenta problemas. Para los objetos geométricos, localmente homeomorfos a un punto, una línea, una superficie, la dimensión topológica es invariante para las transformaciones diferenciables, dilataciones y contracciones. Los valores del exponente para los sistemas métricos clásicos son enteros (dimensión topológica). Cuando la dimensión no es entera la dimensión del objeto conduce al concepto de fractal (este concepto fue introducido por B. Mandelbrot y viene del latín “*fractus*”, forma verbal de “*frangere*”: ruptura), llamada en matemática dimensionalidad de recubrimiento del objeto, por analogía con el exponente del adoquín patrón. En la Física de transiciones de fase este exponente se denomina exponente crítico.

16

Es importante recalcar que en cualquier situación no siempre se obtendrá, en papel *logarítmico - logarítmico*, un gráfico en línea recta. Cuando si ocurre que resulta una línea recta, decimos que se tiene una función homogénea o una relación homogénea entre magnitudes clásicas y un adoquín del espacio topológico, al cambiar la escala. Estas funciones son aquellas que verifican la condición $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$; en el lenguaje físico se dice tener una simetría de escala, en el espacio donde esté inmerso el objeto hay una simetría denominada la auto-similaridad o invariancia global de escala. Hoy día existe todo un formalismo de la dimensión fractal, llamado también geometría fractal, después de una brillante introducción hecha por Benoit Mandelbrot. Otros autores, entre ellos J.E. Gouyet han desarrollado ampliamente el formalismo matemático asociado a esta geometría.

Estos resultados conducen a una reflexión sobre algunos supuestos que tenemos en Física. En el formalismo *Hamilton-Jacobi* de la Mecánica Clásica las transformaciones de coordenadas significativas son las canónicas. Son aquellas que dejan invariantes los corchetes de Poisson. Sin embargo, los corchetes de Poisson no son siempre invariantes por la simetría de cambio de escala, con excepción del caso en que los potenciales son de la forma



newtoniana con exponente dos, negativo, para la fuerza. Todos los demás casos imponen una escala fija. Esta aparente contradicción en Física clásica, fue resuelta cuando se aceptó que existen fenómenos naturales en los que las propiedades físicas importantes no son invariantes por simetría de traslación o rotación, pero si lo son por cambio de escala.

La invariancia de escala de tipo fractal se obtiene a través de una operación que fija un punto en el espacio e impide la rotación (no hay invariancia por traslación y rotación) y se realiza el cambio de escala. Esto puede presuponer que no necesariamente hay invariancia simultánea de traslación o rotación, y de cambio de escala.

Las funciones que verifican esta simetría son las funciones homogéneas pues el generador infinitesimal de la simetría, tal como se señala debe ser de la forma $\vec{r} \cdot \vec{\nabla}$ (producto escalar del vector posición por el operador nablá). Las funciones propias de este operador (o simetría), en una dimensión, son de la forma $f(x) = Ax^n$ y los valores propios serían n , dimensión del espacio de la función que puede ser un número real. El exponente crítico es n y a la vez es la cantidad que tiene permanencia durante el proceso de la medición (que asociábamos a la pendiente del gráfico \ln versus \ln). Por ello los fractales, que no tienen simetría de traslación, es decir, que no poseen una invariancia en sus propiedades por traslación (y/o rotación) si tienen una propiedad que se conserva denominada la imagen a diferentes escalas. Dicho de otro modo, son autosimilares.

Es bueno, entonces, considerar la actualización del concepto que aprendimos y que define medir, pues no es sólo comparar con un patrón, ya que involucra un análisis más crítico de tal concepto. Los fractales son una ilustración de cómo algunos procesos legendarios como la medición necesita una actualización constante. Podemos entonces, extender el concepto de medir para los casos en los cuales no hay invariancia por traslación/rotación como el proceso mediante el cual se hace un cambio de escala del patrón, preservando una invariancia (el exponente crítico), aunque no haya invariancia traslacional y/o rotacional.



3. TRANSICIONES DE FASE

Mencionamos que encontramos exponentes críticos en la rama de la Termodinámica correspondiente a las transiciones de fase. En esta disciplina, un sistema mínimo está caracterizado solo por tres variables y una relación simple entre ellos. Un parámetro de evolución para dar el toque dinámico a la situación (temperatura), las condiciones de frontera que plantean la necesidad de la separación de los sistemas (presión) y un parámetro escalar que caracterice el objeto de estudio, por ejemplo, el volumen o la densidad. Una relación simple entre estas variables define la ecuación llamada de estado. Por ejemplo, en Termodinámica clásica un fluido o gas ideal se caracteriza por tres variables macroscópicas, P , T , V y su ecuación de estado (la más simple que podamos imaginar, es decir una relación lineal entre ellas). Si vemos la segunda ley de Newton de la siguiente forma $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ y multiplicamos ambos miembros por $d\vec{r}$ (con S como superficie) $\vec{F} dt \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot d\vec{r}$ y $(\vec{F}/S) \cdot d\vec{r} S = d\vec{p} \cdot d\vec{r}/dt$ donde \vec{F}/S es P (presión), $S d\vec{r}$ es dV (volumen) y $d\vec{p} dt$ es una acción, tenemos $PV = nRT$ donde $T = 1/t$ y nR es una constante ligada a la acción:

18

$$P = P(V, T) = nRT/V$$

O bien la ecuación se puede escribir:

$$F(P, V, T) = 0$$

La cual define una superficie en el espacio de dimensión tres de las variables P, V, T . Cada punto sobre la superficie representa un estado de equilibrio. Como en general, los procesos son a masa constante, podríamos trabajar con la densidad en lugar del volumen, recordando la definición de densidad asociada a la masa y al volumen $\rho = m/V$, la ecuación se escribe:

$$F(P, T, \rho) = 0$$

Un ejemplo típico de transición de fase es el paso del agua líquida a gaseosa, a presión de 1,0 atmósfera y a temperatura de 100 °C. La fase líquida puede convivir con la fase gaseosa. Otro caso es el helio líquido a presión de 1,0 atmósfera y a temperatura de 2,18 K, el cual se separa en dos fases: helio líquido I y helio líquido II. Ambas fases son líquidas y coexisten

en equilibrio. Por último, tenemos las transiciones de fase polimórficas en los sólidos, por ejemplo, la transformación de un sistema tetragonal en cúbico.

El agua en su estado cristalino o sólido se conoce como hielo. En la fase sólida hay un ordenamiento de las moléculas, mientras que en la fase líquida el ordenamiento disminuye y finalmente en la fase gaseosa o vapor de agua, la distancia entre las moléculas es grande en comparación con las otras, de tal modo que su movimiento pueda considerarse casi libre y no hay ningún ordenamiento. Podemos entonces definir un parámetro que indica el ordenamiento, llamado parámetro de orden.

Para efectos científicos y técnicos, es interesante conocer la fase de diversos materiales a cualquier temperatura, es por ello que se utilizan los diagramas de fases. Estos diagramas de fases muestran las fases y sus composiciones para distintas temperaturas. Un diagrama de fase permite estudiar el comportamiento de parámetros externos en función del parámetro de orden.

La figura 2 muestra un diagrama ya visto, simple, clásico, de fase para el agua (Wikipedia).

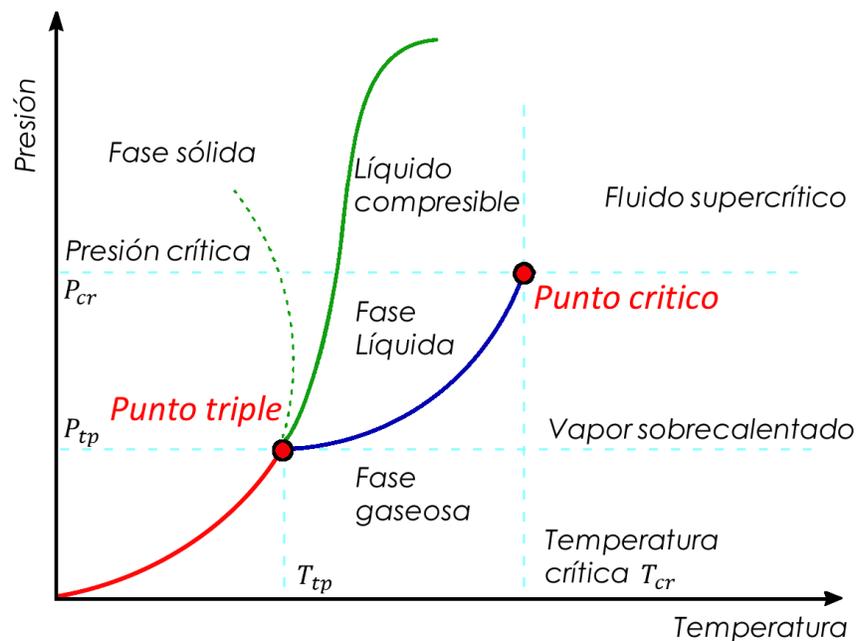


Fig. 2. Diagrama de fase para el agua.

La teoría actual de transiciones de fase considera dos problemas básicos:

- Estudia las interacciones responsables de la transición de fase: por ejemplo, las fuerzas intermoleculares responsables de la condensación y enfriamiento de un gas - líquido, las fuerzas íter electrónicas responsables de la superconductividad o el cambio de fuerzas que están al origen de las propiedades ferromagnéticas.
- El otro problema se refiere a estudiar la estadística de las partículas, cerca de las transiciones de fase, tomando en cuenta las fuerzas intermoleculares conocidas, para conocer las funciones que describen la distribución.

La Física Estadística de transiciones de fase tiene una larga historia. Sus inicios lo encontramos a finales del siglo XIX con el trabajo fundamental de Weiss y Van der Waals. Ellos detectaron la existencia de aparentes anomalías en las transiciones de fase tales como parámetros que se van al infinito en los puntos de transición. Entre estos parámetros podemos mencionar calor específico, susceptibilidad, compresibilidad, etc. También existen en las transiciones otros fenómenos raros, pero interesantes, como la opalescencia crítica. Estas fluctuaciones críticas eran difíciles de entender, y por ende de manejar teóricamente, antes de conocer los fenómenos ligados a la geometría fractal. En efecto, en la transición de fase líquido-gas, hay un comportamiento de escalamiento, aparecen gotas del líquido de todos los tamaños, desde gotas visibles del líquido hasta gotas formadas por una sola partícula de gas que se encuentran al final de la escala de tamaños (casi seis órdenes de magnitud). Para verificarlo, si enviamos un haz de luz blanca, es dispersado por las gotas, en particular habrá gotas de tamaño del mismo orden de magnitud que las longitudes de onda del espectro de la luz incidente generando una dispersión lumínica. Aparece entonces la dispersión magnificada y el fenómeno se conoce como opalescencia crítica. El fenómeno está ligado a la existencia de gotas que difractan a (casi) todas las escalas. Observamos allí una propiedad de los fractales. Un patrón que se repite a todas las escalas. No hay invariancia por traslación/rotación, pero si auto similitud, por ello es un fenómeno fractal. Entonces el modelo de la transición de fase debe ser de un sistema con comportamiento fractal.

3.1. Clasificación de las transiciones de fases según Ehrenferst.

Previamente, las transiciones de fase eran generalmente clasificadas de acuerdo a un procedimiento macroscópico diseñado por Ehrenfest (fiesta de honor). Generalmente, las variables extensivas asociadas a la energía interna son V (volumen por PdV de trabajo) y S



(entropía por TdS de calor), y eventualmente N (número de partículas por $Nd\mu$ de energía química). Si queremos cambiar las variables por razones que los físicos conocen, como son el hecho de hacer explícita una variable cíclica (intensiva) en el proceso, la cual podemos controlar más fácilmente, podrían definirse la entalpía ($H=U+PV$) para cuando la variable es intensiva P (presión) en lugar de volumen V (su variable conjugada) y/o la función de Helmholtz (antes llamada $F=U-TS$) si la variable es T (temperatura) en vez de la cuantitativa, entropía S (su variable conjugada). La función de Gibbs ($G=U+PV-TS$) es el caso en que queremos que la energía se exprese con ambas variables intensivas T y P .

En las transiciones de fase clásicas (sublimación, fusión, y vaporización) en donde entran en juego los calores latentes (la función libre de Gibbs se mantiene constante o se minimiza) no presentan variación ni P ni T (procesos reversibles isobáricos e isotérmicos). Nótese, además que en el diagrama del agua P versus T , las curvas para distintas fases tienen, en la temperatura crítica, un cambio de comportamiento en su derivada. Esto llevó a una clasificación de las transiciones de fase según la discontinuidad de las derivadas de la función G de Gibbs ($G=U+PV-TS$), función de P y T .

3.2. Cambios de Fase de Primer orden.

Ehrenfest notó que hay variables cuya derivada es discontinua y sugirió que debemos llamar una transición de fase como de primer orden cuando las primeras derivadas de la energía libre $G(P,T)$, con respecto a las variables de estado T y P (intensivas), son discontinuas:

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P, \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$$

Hay pues discontinuidad en las cantidades físicas ligadas a la primera derivada de la energía de Gibbs, S y V , en el punto correspondiente a la temperatura crítica T_c . Si graficamos G en función de S y V , tenemos una superficie, y un corte nos da el gráfico de la figura 3.

La variación de G en función de T es ilustrada esquemáticamente en la figura 3. Se observa que la derivada de G con respecto a T (o sea S) es discontinua en el punto de la temperatura crítica.

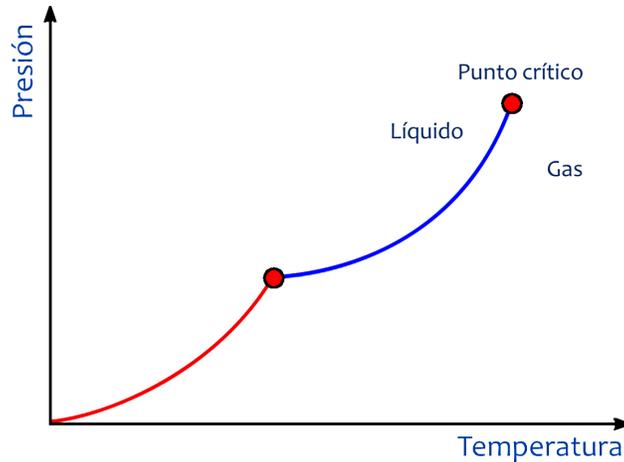


Fig. 3. Gráfica Presión vs Temperatura.

3.3. Cambios de Fase de Segundo orden.

De acuerdo al esquema de clasificación de Ehrenfest, una transición de segundo orden sería aquella en la que la función de Gibbs es continua, así como su primera derivada con respecto a las variables de estado, pero discontinua en la segunda derivada. No habría en este caso ninguna discontinuidad en las primeras derivadas S , V , pero habría en las segundas que son la capacidad calorífica C_p y la compresibilidad K , ambas segundas derivadas de la función de Gibbs:

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_P, \quad K = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right)_T$$

Algunos ejemplos de transformaciones de fase de segundo orden son las transiciones en materiales puros y aleaciones, como por ejemplo la transición de paramagnetismo a ferromagnetismo o a antiferromagnetismo.

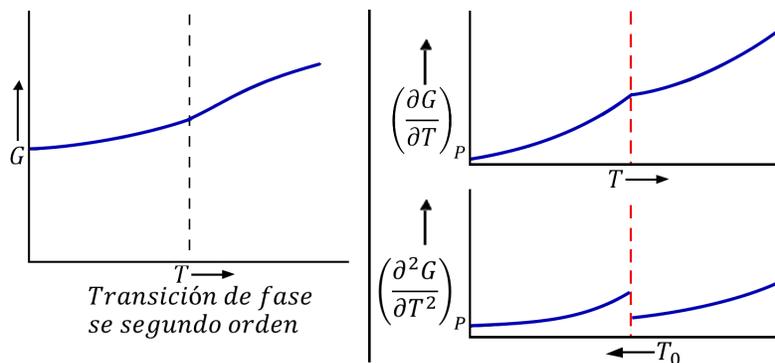


Fig. 4. Representación gráfica de transiciones de fase de segundo orden.

Ehrenfest pensaba que existían transiciones de fase de orden superior, ($n > 2$ derivada enésima) en analogía a las precedentes.

De acuerdo a esta clasificación, una transformación de tercer orden sería continua, por ejemplo en G , S , y C_p pero discontinua en $(\partial C_p / \partial T)_p$. Si ellas existiesen son difíciles de encontrar experimentalmente. Un ejemplo de esto sería la derivada del calor específico del cuarzo, en la transición de fase, cuya derivada no se conoce muy bien por su rápida variación.

Hasta hace apenas unas décadas se usaba esta clasificación para (caracterizar) las transiciones de fase.

Antes de presentar el concepto y utilidad de los exponentes críticos en las transiciones de fase, indicaremos diversos puntos de vista que se deben tomar en cuenta para la mejor comprensión de esta nueva clasificación.

Para el estudio de diversos sistemas a n cuerpos, en la vecindad de los puntos críticos, se acostumbra a definir un conjunto de parámetros macroscópicos o variables termodinámicas, con ciertas características asociadas a las transiciones de fase. Las variables se suelen normalizar para universalizarlas. De esa manera las ecuaciones de estado de los distintos sistemas se escriben en la misma forma y los sistemas pueden ser comparados con miras a buscar comportamientos universales. Por ejemplo, en muchos casos de transiciones de fase, las densidades divergen a ambos lados de la temperatura crítica, pero su divergencia es del mismo tipo o ritmo, por lo que la diferencia entre ellas toma valores finitos y se expresan en la forma de una función que define bien la variación de una función que caracteriza el fenómeno. Esta variación es aproximada con un desarrollo en serie, cuyo término básico es un monomio en forma de una función homogénea (potencial) cerca de la transición. Esto significa que hay una simetría de escala asociada (pues se trata de funciones homogéneas). El exponente crítico es un valor propio de la operación de simetría que llamamos S , correspondiente al cambio de escala aplicado sobre la función f , o sea $Sf = \beta f$. Tenemos así cuatro cantidades interesantes, escritas en función del parámetro de evolución T , normalizado.

La primera es la diferencia de densidades de ambas fases, la cual presenta un comportamiento de función potencial en T normalizada, tal que la diferencia de densidades normalizada, en la transición, que es la región de coexistencia (líquido-vapor), toma la forma de una función homogénea



$$\frac{\rho_e(T) - \rho_g(T)}{\rho_c} = B \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta (1 + \dots) = B \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^\beta (1 + \dots)$$

donde ρ_e , ρ_g , ρ_c son las densidades (con subíndice para la fase líquida l, gas g, y crítica c, respectivamente), β es el exponente, que como es lógico es llamado crítico, T_c es la temperatura crítica y B es un coeficiente.

La segunda función, que ya se había identificado con un comportamiento especial en algunas transiciones de fase, es la compresibilidad isotérmica. Recordemos que esta se define como: $K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ donde usamos la compresibilidad normalizada para universalizar la expresión, evaluada en el punto crítico que llamamos $E = \frac{T - T_c}{T_c}$, o sea la temperatura normalizada,

$$\frac{k_T}{k_T^0} = \begin{cases} \left\{ C' (-E)^{-\gamma} [1 + \dots] \right. & \text{Si } T < T_c \\ \left. \left\{ C' (E)^{-\gamma} [1 + \dots] \right. \right. & \text{Si } T > T_c \end{cases}$$

24

Con C' constante y γ es el exponente crítico. En la expresión se plasmaron dos posibilidades para acercarse al punto crítico, por valores de E positivos y por valores negativos. Si $T < T_c$ se hace por la curva de coexistencia. Si $T > T_c$ se hace con la isobárica crítica.

Muchos fenómenos hacen llamado a la tercera relación, que es la de presiones en la isotérmica crítica y se expresa también con funciones homogéneas,

$$\frac{p - p_c}{p_c^0} = D \left| \frac{p}{p_c} - 1 \right|^\delta \text{sgn}(p - p_c) \text{ en } T = T_c$$

donde D es una constante y δ es el exponente crítico, además el símbolo *sgn* significa

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene el calor específico a volumen constante que también se puede expresar con una función homogénea

$$C_V = \begin{cases} A(-E^{-\alpha'})[1 + \dots] & \text{Si } T < T_c \\ A'(E^{-\alpha'})[1 + \dots] & \text{Si } T > T_c \end{cases}$$

Con A y A' constantes y α es el exponente crítico. En este caso, como el de la compresibilidad, se muestran también, dos aproximaciones cerca del punto crítico.

3.4. Exponente Crítico.

La noción de exponentes críticos nació aproximadamente en 1879 cuando J. Van der Waals la introdujo en conexión con la teoría de la capilaridad de Laplace. El planteamiento clásico, en Termodinámica, consiste en lo siguiente: sea un fluido que obedezca bastante bien a la ecuación de Van der Waals,

$$\left(P + \frac{a'}{V^2} \right) (V - b) = kT'$$

en la cercanía o vecindad del punto crítico, la presión del fluido se representa con una función homogénea la cual queda en la forma:

$$\frac{p - p_c}{p_c^0} = D \left| \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right|^{\delta} \text{sgn}(\rho - \rho_c) \text{ para } T = T_c$$

y la expresión obtenida a partir de la isoterma crítica para el modelo de Van der Waals arroja la siguiente expresión

$$\frac{p - p_c}{p_c^0} = \frac{9}{16} \left| \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right|^3 (1 + \dots)$$

que comparando con la expresión del modelo anterior se tiene los valores $\delta = 3$ para el exponente crítico y $D = 9/16$, para la constante.

Estudiando experimentalmente, las diferencias de densidades de las fases vapor y líquido, en la vecindad del punto crítico, con las mismas hipótesis anteriores, se encuentra:

$$\frac{\rho_L(T) - \rho_G(T)}{2\rho_c} = 2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

de donde, por comparación con las densidades de la curva de coexistencia, se tiene $\beta = \frac{1}{2}$ y $B = 2$.

Por un lado, observamos que se cumple la generalidad ya que el comportamiento de los gases en la transición de fases muestra curvas del tipo potencial. Sin embargo, el modelo de Vander Waals no arroja los valores de los parámetros encontrados experimentalmente.

Con el fin de seguir comparando la fenomenología de las transiciones de fase, con los modelos teóricos para el caso de las transiciones de fase, veamos lo que sabemos sobre otros modelos teóricos:

3.5. El paso líquido – vapor en un fluido cualquiera para la Termodinámica (modelo fenomenológico)

26

Según la Termodinámica clásica, la transición, líquido – vapor, puede ser descrita por la ecuación de Clausius-Clapeyron

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_{fi}}{T(V_f - V_i)} \text{ o de forma integral } \ln P = -\frac{l_{fi}}{RT} + C.$$

Trabajaremos con la densidad en lugar del volumen, a saber, $f(P, T, \rho) = 0$,

Se observa, en el diagrama de fases, que se puede pasar continuamente de líquido a gas y viceversa, más allá del punto crítico. Nos centraremos, en este caso particular, en el punto crítico (fluido supercrítico) del sistema que tiene un comportamiento de interés para nuestro estudio.

Más allá de ese punto, se encuentran conviviendo juntas, burbujas de vapor y gotas de agua, ínter mezclada, de todos los tamaños posibles y la distinción entre agua y vapor se esfuma, lo mismo que la tensión superficial entre las dos fases se hace cero. El punto crítico marca el final de la curva de coexistencia, más allá de este punto no se pueden distinguir las

fases, hay una sola **fase homogénea**.

Además del punto crítico donde desaparece la curva, podemos también notar en el diagrama de fases (figura 2), la región que es una línea donde subsisten dos fases (verde, roja y azul) y existe un punto triple donde subsisten tres fases: líquido, gas, y sólido. Antes del punto crítico se tiene de un lado la región de gas con densidad ρ_g y del otro lado, la región de densidad ρ_l para los líquidos.

En el gas todas las direcciones son equivalentes, pero no hay ningún nivel de ordenamiento de las partículas, mientras que el ordenamiento de las partículas va creciendo al bajar la temperatura, pasa por líquido y termina con una red cristalina perfectamente ordenada: hielo. La variable ρ es, para comportamientos normales, una variable macroscópica de medición de ese orden de las partículas. Representaría pues el parámetro de orden indicado por Landau.

3.6. Diagramas de las isotermas.

La región de dos fases está caracterizada por una diferencia de densidades ($\rho_g - \rho_l$) pero no está bien definida. Sin embargo, esta diferencia se anula para todo T igual o superior a la temperatura crítica. Nótese que la densidad crítica ρ_c se puede estimar con el promedio corriente de las dos densidades, para gas y para líquido $\rho_c = \frac{1}{2}(\rho_g + \rho_l)$. Si se comprime un gas a T constante, se describe una isoterma que para T grande y P pequeña se representa bien (teóricamente) en un diagrama P versus V por la ley de los gases ideales; para los otros casos la ecuación de Van der Waals intenta explicar el comportamiento observado. Al comprimirse el gas lo suficiente, comienza la licuefacción del mismo y tenemos ρ_g hasta que es total en ρ_l , y a partir de allí la ecuación describe bastante bien este comportamiento del líquido por la poca compresibilidad de estos, pero no se explica en la región entre gas y líquido.

El gráfico siguiente, se construyó con valores experimentales para diferentes gases, se graficó ρ en función de T . Con esta gráfica se busca obtener una ecuación estado reducida (normalizada, la que intenta ser válida para todos los gases), tomando en cuenta que, a la temperatura crítica de la transición, GL (gas-líquido) se reduce a un solo punto (parte superior), y la isoterma es tal que hay una inflexión en ese punto con tangente horizontal. Se escribe pues una expresión de estados correspondientes normalizados con respecto a T y P críticos. Se observa la independencia del gráfico con respecto al tipo de gas (de monoa-

tómicos a penta-atómicos). Es de notar que la curva no es de la forma predicha por la teoría de Van der Waals, es decir no es de la forma que sigue la ecuación:

$$3\rho^3 - 9\rho^2 + (8T+P)\rho - 3P = 0$$

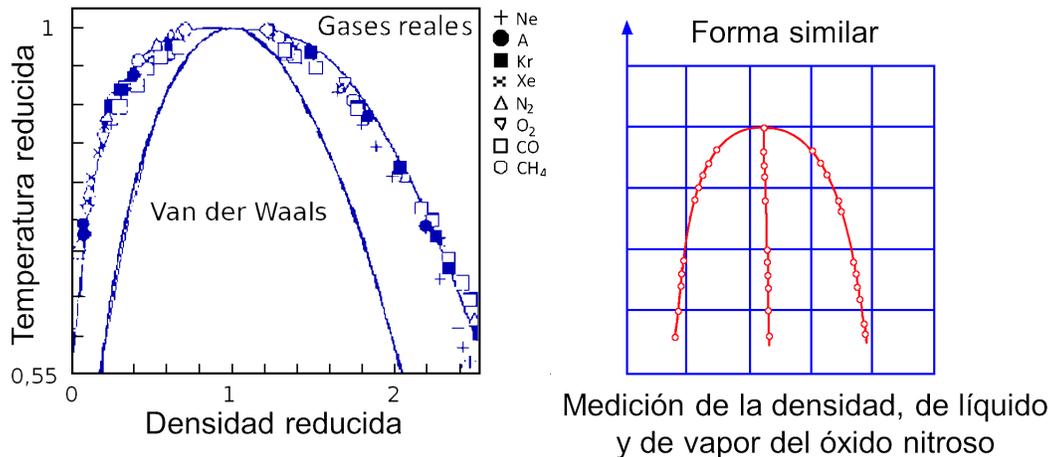


Fig. 5. ρ/ρ_c vs T/T_c .

En la figura 5 se muestra:

28

- la primera, muestra la reducción de coexistencia de las fases líquido y vapor vs la temperatura crítica para un gran número de gases.
- la segunda es la medida de la densidad, de líquido y de vapor, del óxido nitroso que es un gas no estándar, y extrapolación de medida de densidad a través del punto crítico.

El comportamiento cerca del punto crítico $T \approx T_c$ se ve bastante regular por ello se grafica $T_c - T$ para los valores antes del punto crítico ($T_c > T$), en función de $\rho_l - \rho_g$ y, se linealiza la curva en papel doblemente logarítmico; una vez hecho esto, se encuentra una ecuación de la forma:

$$(\rho_l - \rho_g) = A(T_c - T)^{1/3}$$

con un exponente crítico experimental igual a 0,345 y una dispersión de 0,015, todo ello apunta hacia una ley simple y universal cerca de $T_c = T$, con un exponente crítico de 1/3.

Notemos que, la existencia de un punto de inflexión en el diagrama clásico (figura 6) de isothermas (P versus V), sugiere una variable denominada coeficiente de compresibilidad isoterma (asociado a la derivada o pendiente), que, por ser la inversa de la pendiente (que

es cero en la inflexión), diverge en el punto crítico T_c . Eso no debería introducir problemas de principio, muchas divergencias ya suelen ser tratadas adecuadamente por los físicos. El coeficiente es:

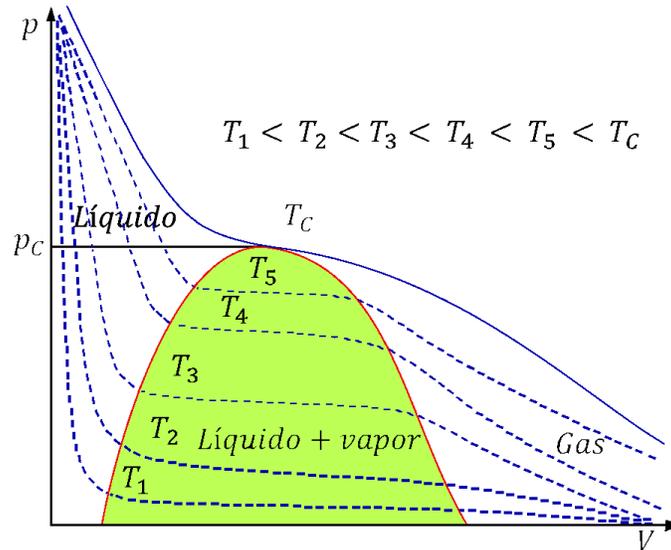


Fig. 6. Diagrama clásico P vs T.

$$k_T = \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

lo que significa que la respuesta de la densidad a una pequeña fluctuación de la presión es infinita, o que no está bien definida la densidad cerca del punto crítico, ni ρ_g ni ρ_l pues existe una mezcla de burbujas de gas con gotas de agua de todos los tamaños, es decir, que existen todas las escalas de tamaño posible dentro del rango de lo macroscópico a lo atómico, pero la diferencia de densidades tiene sentido, ambas divergen de la misma manera dando una diferencia finita.

Además, sabemos que en la vecindad de la transición de fase, al enviar un rayo de luz se producen difusiones pues hay partículas del tamaño de cada longitud de onda dando origen a la **Opalescencia Crítica**.

¿Qué ocurre en este comportamiento de opalescencia Crítica? es lo que queremos explicar en los siguientes párrafos, en ellos tomaremos en cuenta el cambio de simetría, la invariancia de escala, la geometría fractal y su relación con la el cambio de fase líquido - vapor

de un fluido en el punto crítico.

4. CAMBIO DE SIMETRÍA

Fue Landau (1937) el primero que propuso una explicación a la clasificación de Ehrenfest.

Según este modelo, una transición de fase de orden superior a uno corresponde a un “cambio de simetría” del sistema, o sea pasa de una fase menos simétrica a una fase más simétrica. Pero ¿qué es simetría?

¿De qué manera caracterizamos una fase primera (uno) como menos o más simétrica, que una fase dos?

Una fase primera (uno) es más simétrica, que una fase dos sí y solo si:

30

1. Cuando un parámetro intensivo es nulo en la fase dos, lo es también en la fase uno (el estado de las dos fases siendo el mismo).
2. Existe al menos otro parámetro intensivo, que, cuando el otro parámetro intensivo es nulo en las dos fases es:
 - Nulo en la fase dos.
 - No nulo en la fase uno.

El estudio del calor específico para un fluido, en la temperatura crítica T_c , nos muestra que:

$$C_v(V_l, T_c) - C_v(V_g, T_c) = T_c \frac{\partial^2}{\partial T^2} \int_{V_2}^{V_1} P dV \text{ de donde se obtiene que } \Delta C_v = \frac{9}{2}R \text{ en } T = T_c$$

El calor específico presenta una discontinuidad finita en $T = T_c$ con $\alpha = \alpha' = 0$

Al comparar los exponentes críticos para un fluido de Van der Waals podemos ver que la ecuación de Van der Waals muestra el comportamiento del mismo. Sin embargo, desde 1900

había una evidencia concreta de que los exponentes críticos obtenidos a partir de la ecuación de Van der Waals no concordaban con los resultados experimentales.

J. W. Verschaffelt encontró que la curva de coexistencia líquido-vapor en la vecindad del punto crítico, para el dióxido de carbono, mostraba un comportamiento que no se ajustaba al modelo de Van der Waals y era del tipo:

$$\rho_l(T) - \rho_g(T) \approx (T - T_c)^{0,367}$$

es decir, el exponente crítico $\beta = 0,367$, es totalmente diferente al teórico clásico cuyo valor es de 0,50, el cual se encontró con la ecuación de Van der Waals. Medidas más finas (precisas) confirmaron experimentalmente que el valor es de $\beta = 0,3337$ a solo 0,40 °C de la temperatura crítica T_c .

J.W Verschaffelt encontró, para obtener las isothermas compatibles con la curva de coexistencia, que el exponente para la presión P correspondía a $\delta = 4,259$ diferente al valor de $\delta = 3$ previsto por el modelo.

A partir de 1944 se comenzaron a cuestionar las teorías clásicas para explicar los fenómenos críticos.

Un ejemplo fue encontrado en 1944 por el químico L. Onsager quien señala que, en el marco del modelo del Ising, para un material ferro o antiferrimagnético, el calor específico tiene una singularidad logarítmica de la forma $\ln|T - T_c|$ en la vecindad del punto crítico.

En 1945 A. Guggenheim analizó los datos experimentales que tenían hasta la fecha, concluyendo que para varios fluidos era simétrico alrededor de $\rho = \rho_c$ y que el exponente era $\beta = 1/3$ y no a $1/2$ como lo sugiere la teoría clásica.

En 1965 P. Voronel obtuvo una confirmación de algunos valores al realizar medidas de calor específico C_v , del argón, alrededor de T_c .

En la tabla 1 y 2, conocida ampliamente, se muestra algunos resultados experimentales (ver universalidad) y teóricos para fluidos:

Experimento	α	β	γ	δ
He ³	0,115	0,358 0	1,170	4,26
He ⁴	0,101	0,354 0	1,180	4,34
Xe	0,101	0,329 0	1,230	4,74
CO ₂	0,100	0,321 0	1,240	4,85
H ₂ O	0,105	0,338 4	1,219	4,83
SF ₆	0,110	0,338 0	1,170	4,26
Promedio	0,105	0,339 7	1,201	4,55

Tabla 1.

Teórico	α	β	γ	δ
Ising (2d)	0(log)	0,125	$\approx 7/4$	15,0
Clásico	0 (disc)	0,500	1,00	3,0

Tabla 2.

5. RELACIÓN ENTRE LOS EXPONENTES CRITICOS

32

Partiendo de la definición de la función de Gibbs $G(P, T)$ la cual es cóncava en P y T , mientras que la función de Helmholtz $F(T, V)$ es cóncava en T y convexa en V y en conjunto con las definiciones propuestas para los exponentes críticos tenemos que se encuentran las siguientes relaciones entre los exponentes críticos:

- $\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2$ Desigualdades de Rushbrooke

de igual forma

- $\alpha + \beta(\delta + \gamma) \geq 2$ Desigualdad de Griffiths

combinando ambas desigualdades nos queda:

- $\beta(\delta - \gamma) \geq \gamma$ Desigualdad de Windom,

estas desigualdades muestran que sólo dos de los exponentes críticos son independientes.

Además, hay discrepancia con el modelo obtenido por Ising en dos dimensiones, por lo



que la mayoría opina que no es un modelo adecuado para explicar este comportamiento o este fenómeno.

6. INVARIANCIA DE ESCALA O HIPÓTESIS DE ESCALAMIENTO

Vemos que los comportamientos son del tipo funciones homogéneas por lo que deducimos que la invariancia de escala es la simetría de base. Esta simetría, llamada también de escalamiento, busca establecer cómo cambian las magnitudes físicas cuando se realiza un cambio de escala o su equivalente, o sea cuando se cambia el tamaño del patrón de comparación (medición).

Decimos que tenemos una invariancia de escala si al magnificar parte del sistema original, no podemos ser capaces de distinguir entre la magnificación y el sistema original.

Presentaremos dos ejemplos comunes para comprender esta simetría.

Tenemos, por ejemplo, un helecho común. Podemos tomar una lupa y observar solamente una hoja, veremos que la imagen formada nos mostrará rasgos tan parecidos a la imagen original que es difícil diferenciarlos. Otro ejemplo son las costas o fronteras de un país. Si se nos pone como tarea medir la longitud de la frontera, un experimentador la mide tomando como patrón de medición el metro, otra persona toma el kilómetro como patrón, y así sucesivamente, ¿será el resultado igual y nos mostrará una invariancia de escala? La información obtenida midiendo con el kilómetro no es igual a la obtenida con el metro, luego de llevarlo a un mismo patrón (un kilómetro es mil metros), lo mismo sucederá con los que utilizaron el centímetro, micrómetro, etc. Por lo tanto, parece que no hay invariancia de escala en el resultado de la medición desde el punto de vista clásico. Sin embargo, ya vimos que al medir deseamos reproductibilidad, por lo tanto, tenemos que conseguir un invariante y en el caso en que el comportamiento siga una ley que se modeliza con una función homogénea, al graficar los resultados en papel doblemente logarítmico tenemos que la pendiente del gráfico en papel ln-ln es constante y diferente de cero.

Podemos resumir lo anterior diciendo que, en este caso, al medir, para obtener una información reproductible que caracterice el fenómeno no basta con comparar la magnitud con un patrón de dimensión fija, es necesario obtener el exponente crítico, lo que se logra graficando en papel logarítmico-logarítmico, la curva y la pendiente de la recta, que resulta



de graficar los resultados de la medición de la magnitud versus los distintos tamaños del patrón escogido, es el exponente crítico objeto final de nuestra medición. Esto garantiza una propiedad invariante del objeto para todo observador o físico, sea la escala que sea en la que se encuentre.

Presentamos, a continuación, con imágenes, el ejemplo de invariancia de escala, de la hoja del helecho.

Como se muestra en los tres recuadros de la parte derecha de la figura 7, son parte de la hoja y son semejantes en forma, (autosimilares) a la hoja original.

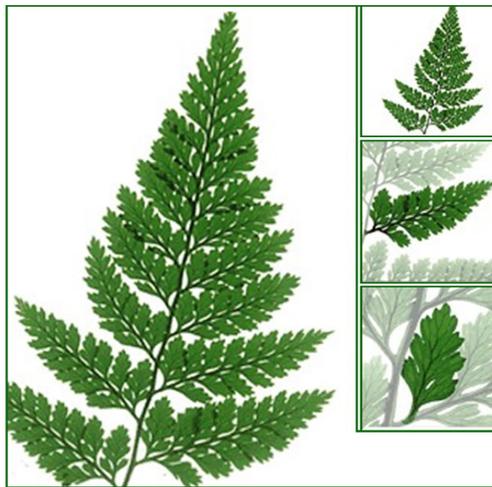


Fig. 7. Hoja de helecho.

Veremos el modelo matemático simple que ilustra la hipótesis de escalamiento o invariancia de escala, la cual requiere que cualquier potencial termodinámico se comporte como función homogénea generalizada, en la vecindad del punto crítico.

7. FUNCIONES HOMOGÉNEAS GENERALIZADAS

Un poco de matemática estándar, necesaria a nuestro caso.

Definición 1

Una función $f(R)$ es homogénea en una región R (números reales) si para

$$\forall \lambda > 0, f(\lambda r) = g(\lambda) f(r)$$

donde $g(\lambda)$ es una función real continua y derivable, no especificada para λ perteneciente a los reales.

Para una determinada función $f(r)$ podemos conocer la función en cualquier punto r si se conoce la función para un r_0 cualquiera y $g(\lambda) = \frac{f(\lambda r_0)}{f(r_0)}$.

Si, además, suponemos que f es continua en R , entonces $g(\lambda) = \lambda^p$, donde p es una constante llamada grado de homogeneidad de la función.

Definición 2

$F(x, y)$ es una función homogénea generalizada si, para dos números reales arbitrarios a y b , se cumple:

$$F(\lambda^a x, \lambda^b y) = \lambda F(x, y)$$

35

La definición es unívoca. Veamos ¿por qué?

$$\text{Sea } f(\lambda^a x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y)$$

Cambiamos $\lambda \rightarrow \lambda^{1/p}$, así tenemos:

lo que demuestra lo anterior.

Según Wikipedia, en matemática, se dice que dos funciones diferenciables f y g son una transformada de Legendre si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra. Se dice entonces que f y g , están relacionadas por una transformada de Legendre. Son unívocas hasta una constante aditiva que normalmente se fija mediante el requisito adicional de que

$$f(x) + g(x) = x y$$



Teorema

Si $f(x, y)$ es una función homogénea generalizada, también lo es su transformada de Legendre $g(u, y)$ donde

$$g[u(x, y), y] = f(x, y) - xu(x, y)$$

$$y \quad u(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$$

8. ESCALAMIENTO DE FLUIDOS

En los fluidos veremos primero cuales son las variables a utilizar. Sabemos que la función de Gibbs se define con $G(T, P, \mu) = U + ST - VP + N\mu$, (donde U es la energía interna, S entropía, T temperatura, P presión, V volumen, N número de partículas y μ potencial termodinámico). Si no situamos en un mínimo, $dG = dU = 0$, podemos escribir:

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0$$

Y de allí,

$$VdP = SdT + Nd\mu$$

Si efectuamos una transformación de Legendre con respecto a N obtenemos, en esta representación, las isothermas del fluido y son antisimétricas y la función debe satisfacer la hipótesis de escalamiento en P_c (presión crítica). Sea la expresión normalizada,

$$\Delta P = \frac{P - P_c}{P_c}$$

de P y usando la definición de invariancia de escala tenemos:

$$f^*(\lambda^{a_D} \Delta P, \lambda^{a_\epsilon} \epsilon) = \lambda f^*(\Delta P, \epsilon)$$

y encontramos, luego de varios análisis

$$a_{\rho} = \frac{1}{\delta+1} = \frac{\beta}{2-\alpha} \quad a_{\varepsilon} = \frac{1}{\beta(\delta+1)} = \frac{1}{2-\alpha}$$

en donde las segundas expresiones se obtienen con ayuda de la relación de Griffiths.

Definiendo:

$$S^* = \frac{T_c S}{\rho_c}, \quad T^* = \frac{T}{T_c}, \quad \mu^* = \frac{\mu_{\rho_c}}{\rho_c} \quad y \quad \Delta\mu^* = \mu^* - \mu^*(\rho_c, T)$$

y analizando este sistema se encuentra que

$$\Delta\mu^* = \Delta\rho^* |\Delta\rho^*|^{\delta-1} D h\left(\frac{X}{X_0}\right)$$

en donde D es la amplitud de la isoterma crítica, $X = \frac{\varepsilon}{(\Delta\rho^*)^{\beta}}$, $X_0 = \frac{\varepsilon}{(\Delta\rho^*)^{\beta}}$.

37

El problema central del estudio de los fluidos está en la determinación de las funciones en la vecindad de la región crítica.

Esta hipótesis de escalamiento ha sido ensayada para varios fluidos y los resultados experimentales han revelado que no todos concuerdan con los valores propuestos por la hipótesis clásica, lo que ha llevado al arreglo de las mismas y explorar la teoría del caos, desde su perspectiva de simetría solo de escala, en busca de universalidad.

9. LOS PRINCIPIOS DE LA TEORIA DEL CAOS

E. Lorenz era un especialista de las ciencias atmosféricas y por accidente descubre, en su área, un hecho raro. Era extraño a pesar de que muchas veces se quedaba observando en detalles las nubes y encontraba que había algo en ellas que las hacían raras por no decir interesantes, pues siempre eran diferentes e impredecible, pero lo que había encontrado no

era lo que un meteorólogo de aquella época encontraba raro como lo fascinante que había siempre en las nubes, figuras siempre diferentes a pesar de darse un tiempo meteorológico parecido, era algo excepcional. Eso lo llevó a hacerse preguntas del tipo ¿Puede el universo elegir con libertad, a capricho, su comportamiento? O simplemente, sigue reglas (geométricas) nuevas que definen ese comportamiento, poco común, que presentan algunos sistemas y figuras geométricas.

Se trataba de un día más de trabajo, por lo que tenía que calcular los datos con el computador, con el objetivo de predecir el comportamiento del tiempo meteorológico. Pero ese día, necesitaba ir más rápido y para no iniciar a cero el cálculo y ganar tiempo en el computador LGP-30, decidió copiar los números finales del día anterior como valores iniciales del nuevo cálculo, directamente de la impresión anterior de esos datos, y se fue a tomar un café mientras se procesaban los datos. Cuando regresó se encontró con algo inesperado y a la vez impresionante, algo que hoy sabemos, sentó algunos de los cimientos de una ciencia que estaba por nacer: teoría del caos determinista.

10. EL CAOS, TÉRMINO QUE ESTÁ AL ORIGEN DEL SURGIMIENTO DE UNA TEORÍA DIFERENTE A LA ANTES CONOCIDA

Todos conocemos el gráfico de una relación lineal cuya ecuación es $y = mx + b$ donde m es la pendiente del gráfico y b la intersección en el eje Oy . La situación lineal más simple es cuando $f(x) = x$, cuya pendiente es uno y parte del origen. La relación más simple que sigue es la cuadrática y ahora tomamos esa curva cuya función más simple está dada por una forma $x^2 + x + \lambda = y = f(x)$, la cual tiene un solo parámetro, y las soluciones generales son $x = -1/2 \pm (1/4 - \lambda)^{1/2}$ que parece simple porque los valores de λ clasifican los tipos de solución de manera obvia y clásica. Sin embargo, si para simplificar (esta vez la forma del gráfico y hacer explícita las soluciones de manera visual) escribimos: $f(x) = -Cx(1 - x)$ o bien $f(x) = Cx(x - 1)$, cuyas soluciones están a la vista y son 0 y 1. Pero grafiquemos ambas funciones juntas $f(x) = x$, y $f(x) = Cx(x - 1)$, en una hoja milimetrada. Nota: Si queremos saber la relación entre λ y C , se hace compleja según los valores de C . Esto parece indicar que pasar de lo obvio a lo operacional no es evidente.

Queremos saber ¿cuál es el punto de intersección entre ambas funciones? Si se aborda por inspección la respuesta es simple, $(x=0 \text{ y } x=1)$ pero si lo hacemos de manera algebraica $x = -1/2 \pm (1/4 - \lambda)^{1/2}$, a condición de que la ecuación sea escrita de manera algebraicamente simple obtenemos las soluciones. Sin embargo, existe un método operacional muy simple pero consumidor de tiempo, llamado de iteración, que consiste en escoger un valor inicial de x cualquiera y lo reemplazamos en la ecuación de la recta. Eso asigna un valor de y sobre la recta, pero también un valor de y sobre la curva cuadrática. A ese valor de y sobre la curva corresponde un valor de x que pasa a ser el valor inicial de la nueva iteración.

Cuando se reitera o repite el proceso un gran número de veces vemos tres regiones que se delimitan, en función del parámetro C , de manera clara.

La primera región es la que brinda la(s) misma (s) solución(es) clásica(s) encontrada(s) sin cálculo, por simple inspección y son los mismos valores de x encontrados por el método analítico. Hay dos soluciones, una trivial $x = 0$, y la segunda solución que es la esperada $(x = 1)$.

La segunda zona nos muestra un comportamiento que llamamos cuántico, pues tiene un conjunto infinito numerable (se puede contar) de soluciones.

Y, por último, la tercera zona, nos muestra un comportamiento caótico. Se llama así pues cada valor es imprevisible, dependiendo de manera sensible de cualquier variación del valor inicial.

El concepto detrás de la palabra caos ha sido siempre engorroso y en ciencias, causa cierta repulsión usarlo e incluso es complejo tratar de caracterizarlo.

Ahora presentaremos una ilustración del comportamiento caótico señalado, utilizando los gráficos de Glenn Elert y recordaremos el procedimiento que nos legó, paso por paso:

1. En un sistema cartesiano, dibujamos las dos curvas $f(x) = x$, y $f(x) = Cx(x - 1)$, que se interceptan. Escogemos un punto del eje X para iniciar el proceso de iteración. Este punto será denominado el valor inicial del proceso.
2. Dibujamos una vertical (paralela al eje Oy) desde ese punto inicial hasta interceptar la recta $y = f(x) = x$, el valor de y será tomado como valor de y de la parábola

$y = f(x) = Cx(x - 1)$, y regresamos (tomamos) al valor de x de esta curva, es decir a partir de la parábola, para que se convierta en valor inicial de la nueva iteración.

3. Repetimos el proceso con el nuevo valor inicial de x .

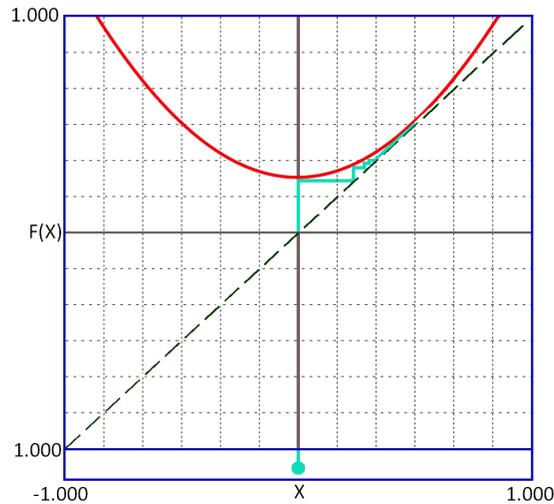


Fig. 8. Gráfico de Glenn Elert.

40

Las zonas van a depender del parámetro C, por ello es conveniente hacer variar C.

Para un parámetro: $C = 1/4$ y para el valor inicial 0. La línea que se forma se llama órbita, y tiende a un valor de $1/2$.

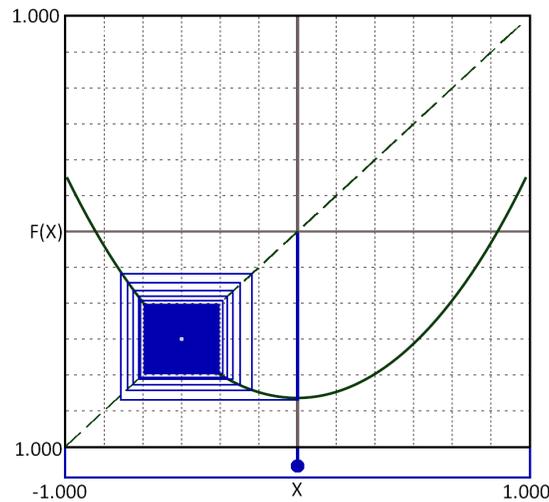


Fig. 9. Gráfico de Glenn Elert.

Para el parámetro $C = -3/4$. Nótese que la órbita se aproxima desde los cuatro lados al punto de intersección, pero después de las **1 000** iteraciones realizadas todavía queda un

puntito blanco en el centro: la órbita **no** ha alcanzado su valor final.

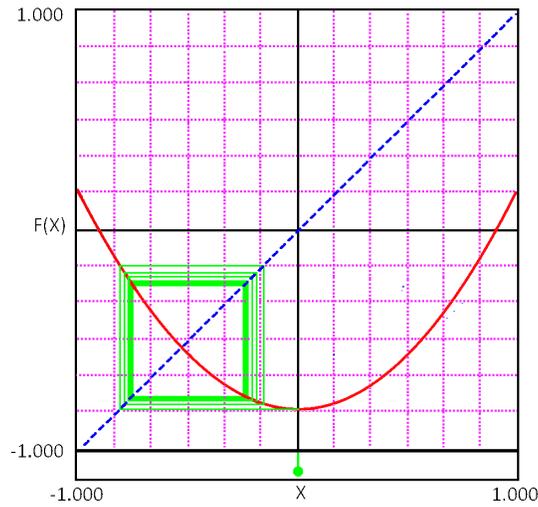


Fig. 10. Gráfico de Glenn Elert.

$C = -13/16$. La órbita comienza a circular alternándose entre $-3/4$ y $-1/4$.

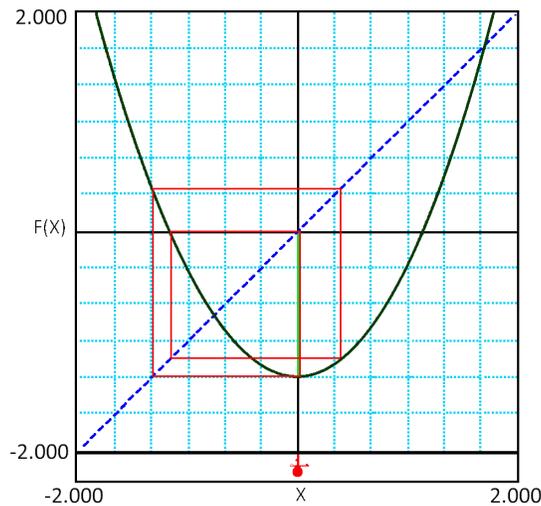


Fig. 11. Gráfico de Glenn Elert.

$C = -1,3$. La órbita oscila en un ciclo cuádruple entre los valores 1,299 622 463 7; 0,389 018 548 3; -1,148 664 569 1 y 0,019 430 292 3. Esta vez, después de sólo 100 iteraciones, la órbita parece haber alcanzado su valor final.

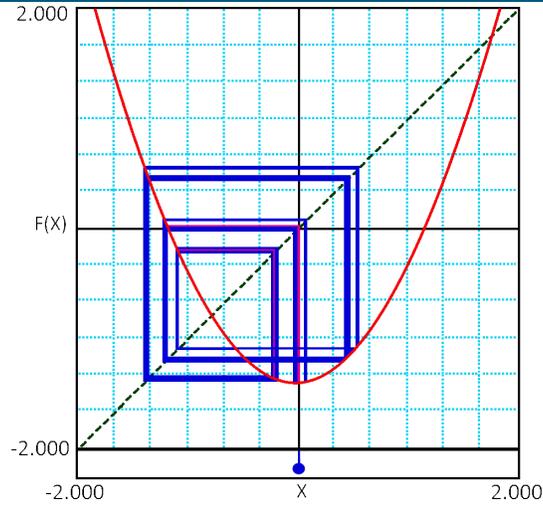


Fig. 12. Gráfico de Glenn Elert.

$C = -1,4015$. Se parece a la gráfica anterior, sin embargo, en ésta la órbita nunca pasa por el mismo sitio, sino que se ajusta a unas bandas.

42

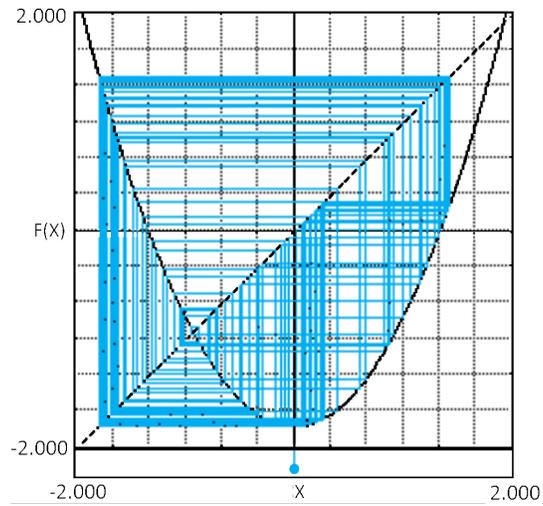


Fig. 13. Gráfico de Glenn Elert.

$C = -1,8$.

Esta es la región del CAOS. Se ve que al cambiar el valor inicial (por pequeño que sea el cambio) la órbita cambia totalmente.

11. LA DIMENSIÓN FRACTAL

La medición de formas fractales (fronteras, copos de nieve, etc.) nos ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido de manera tal que a medida que disminuimos la escala encontramos que el objeto está constituido por elementos cada vez más pequeños, algunas veces en relación funcional con los objetos de la escala anterior (caso de Cantor, Koch), pero no necesariamente hay una relación funcional entre esos patrones de escalas diferentes (movimiento browniano). Por ello notamos que el concepto de longitud, superficie o volumen clásico como patrón o adoquín de base no está claramente definido.

Por ejemplo, cuando se quiere medir una línea fractal con una unidad patrón fija, o con un instrumento de medición determinado, siempre habrá partes más finas del objeto que escaparán al recubrimiento de la regla o al instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la precisión del instrumento aumenta el resultado de la dimensión del objeto medido, pero de manera aparentemente no escalada. Por ello hay que aceptar la dimensión no entera.

Ahora llevemos esto al problema que estamos estudiando que es la transición de fase y su comportamiento cerca del punto crítico. Tenemos un sistema con comportamiento fractal en el punto crítico. Recordemos el fenómeno de opalescencia crítica donde los estados líquido y vapor coexisten y no se sabe cuál es la fase en la vecindad de dicho punto. Se observan, además, diversas gotas del tamaño que uno se quiera imaginar, esto nos lleva a un estudio sobre las características físicas y matemáticas de dicha zona, pero las trayectorias de las curvas que representan las funciones son impredecibles y la Termodinámica Clásica no puede explicar el fenómeno. Es, entonces, cuando, al enviar un rayo de luz láser a esa zona, se observan simples imágenes autosimilares de distintos tamaños que describen una invarianza de escala y es pues el punto fundamental que une la invarianza de escala con los fractales y la transición de fase.

Algo parecido sucede en las fronteras de un país, es una transición entre dos regiones, por ejemplo, tierra-mar. Pero ¿qué es ser auto similar? Imaginémonos la costa de un lugar X, Panamá, por ejemplo, y ahora lo llevamos al nivel microscópico y le sacamos un grano de arena de la frontera tierra-mar. La longitud de la frontera cambiaría en una escala dada. ¿Qué pasará cuando vuelva a medir mi sistema original con la misma regla? Si colocaremos mi imagen con el cambio realizado encima de la original ¿qué observará? Se observa la



auto-similaridad; la nueva imagen es casi idéntica a la original, incluso con miles, sino millones, de granos de arena sustraídos.

Por ejemplo, en la curva de Koch, cada paso en la génesis de la curva aumenta un tercio su longitud. Es decir, la longitud de la curva que ocupa el espacio inicial se divide en tres partes y una de las partes se transforma en dos veces esa longitud que es un tercio de la original, va pues aumentando, en cada paso, su longitud de $1/3$ de forma indefinida y con ello va invadiendo el plano, aunque sea de manera infinitesimal. Cada curva es $4/3$ superior a la anterior, sin embargo, son autosimilares.

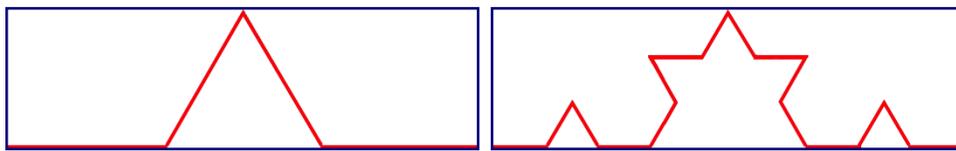


Fig. 14. Aumento de un tercio en la longitud de la curva de Koch.

Así por ejemplo, figura 15, en el caso de la curva poligonal de nivel 10, la longitud es $1 \times (4/3)^{10}$:

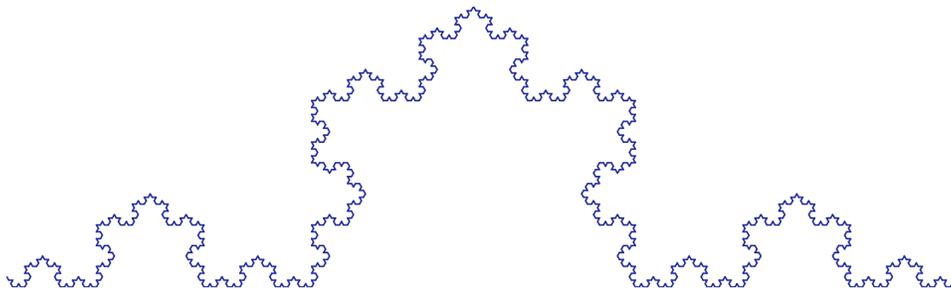


Fig. 15. Curva de Koch, en el nivel 10.

De esta forma la curva aumentaría indefinidamente su longitud para un fragmento original, acotado de curva. Y llega el momento en que no vemos el triangulito pequeño en cada segmento (tercio) a menos que utilicemos una lupa y así al infinito. ¿Puede esto ser así, aumentar su longitud más allá de R (la recta como espacio de dimensionalidad 1)?

Como la longitud de la línea fractal depende de la longitud del instrumento, o de la unidad de medición que tomemos, la noción de longitud en estos casos, carece de sentido. Sin em-

bargo, para nosotros, sigue siendo una línea, no una superficie y en ese sentido adoptamos un prejuicio sobre la dimensión topológica del espacio. Por ello, para esclarecer se ha ideado otro concepto: el de dimensión fractal. Que, en el caso de las líneas fractales, pasa a indicar cómo se realiza el cambio, nos va a indicar de qué forma o en qué medida una línea fractal llena (invade, adopta, tesela, etc.) una porción de plano. Y que, además, matemáticamente es una generalización de la dimensión euclídea. Sabemos que en geometría clásica un punto tiene dimensión cero, un segmento de línea tiene dimensión uno, un pentágono regular tiene dimensión dos, y una esfera tiene dimensión tres. Para que sea coherente con lo dicho, una línea fractal tiene que tener dimensión menor que dos (no llena toda la porción de plano), pero superior a uno pues va más allá de \mathbf{R} y tesela parte del plano. Y en los casos del conjunto de Cantor (no llena o tesela la recta, es menor que uno) y de la curva de Koch (que llena o tesela más allá de la recta y es mayor que uno) no tienen dimensión entera. En el primer caso no llena todo el segmento de recta, y en el segundo es más “largo”. Sin embargo, el caso del conjunto de Cantor parece ser excepcional y algunos no lo consideraban propiamente un fractal, en general lo que sucede es que la longitud de la curva fractal es superior a la del segmento de recta que lo genera, y por tanto en general la dimensión fractal será un número comprendido entre uno y dos.

45

El conjunto de Cantor, al inverso que Koch, es tal que se construye de modo recursivo inverso dando los siguientes pasos:

- El primer paso es tomar el intervalo $[0, 1]$.
- El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto $(1/3; 2/3)$.
- El tercero es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos $(1/9; 2/9)$ y $(7/9; 8/9)$.
- Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan. El proceso no tiene fin.

Como precedente a la dimensión fractal nos encontramos con el concepto de dimensión, definida por Félix Hausdorff en 1919, perfeccionada más tarde por Besicovitch. La dimensión Hausdorff $H(X)$ de un objeto “fractal” X mide el número de conjuntos (sub conjuntos) de longitud L que hacen falta para cubrir X con L . ¿Por qué usamos ese razonamiento? Recordemos que \mathbf{R} se construye como las partes de \mathbf{N} (conjunto de los enteros) o sea $2^{\mathbf{N}}$.

La dimensión fractal, D , como veremos es una generalización de la dimensión euclídea:



DE. Si iniciamos con un segmento de longitud uno, y lo partimos en segmentos de longitud L , obtendremos $N(L)$ partes, de manera que

$$N(L)(L)^1 = 1$$

cualquiera que sea L .

Si el objeto inicial es un cuadrado de superficie uno, y lo comparamos con unidades cuadradas, cuyo lado tenga la longitud L , el número de unidades que es necesario para recubrirlo $N(L)$, cumple con

$$N(L)(L)^2 = 1$$

cualquiera que sea L (figura 16):

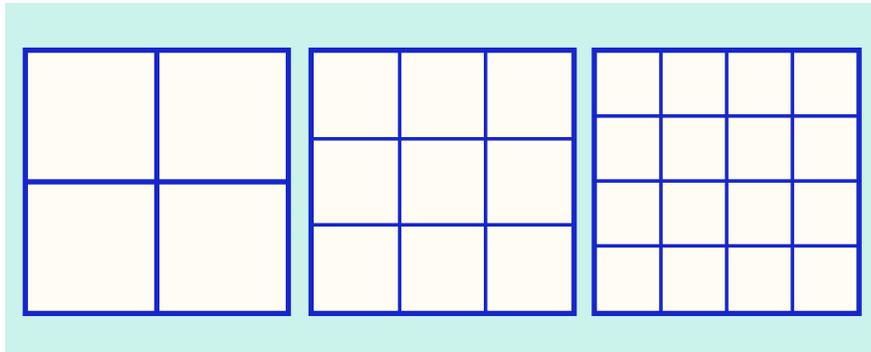


Fig. 16. Cuadrados con distintos L .

Si, por último, el objeto que tomamos es tridimensional, como, por ejemplo, un cubo de volumen uno, y lo medimos en relación con unidades que sean cubos de arista L , entonces se cumple que

$$N(L)(L)^3 = 1$$

Cualquiera que sea L (figura 17):

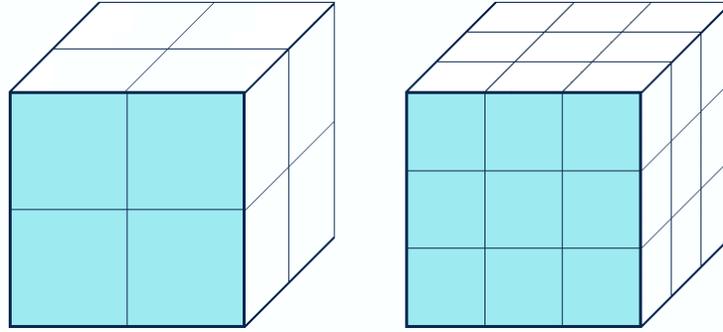


Fig. 17. Cuadrados con distintos L.

De todo esto podemos generalizar que la dimensión fractal de un objeto geométrico es D si

$$N(L)(L)^D = 1$$

donde N(L) es el número de objetos elementales, o de unidades patrones, de tamaño L que recubren, o que completan, o teselan el objeto.

De donde deducimos, despejando D, que

$$D = \ln(N(L)/\ln(1/L))$$

De aquí podemos deducir las dimensiones del conjunto de Cantor o el conjunto patrón

$$D = \ln(2)/\ln(3) = 0,6309\dots$$

La de la curva de Koch

$$D = \ln(4)/\ln(3) = 1,2618\dots$$

D será la dimensión del objeto medido (o construido) con ese patrón. Sin embargo, se solía aceptar, e incluso definir, que un objeto es fractal solo cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión euclídea:

$$D > DE$$

Así, por ejemplo, no se consideraba fractal el conjunto de Cantor. Pero se puede generalizar

para incluir los ensayos de teselar con un patrón menor.

12. LA BELLEZA INFINITA DE LOS FRACTALES

Presentamos a continuación un conjunto de imágenes en las que vemos ilustraciones sobre fractales.

En esta figura se exploran las posibilidades del mapa complejo exponencial $Z_{n+1} = ce^Z n$. El conjunto tipo Mandelbrot (las tres imágenes de la fila superior) así como los conjuntos de Julia (las tres imágenes de la fila inferior) de este mapa presentan la interesante propiedad de crecer con el número de iteraciones, de forma que evocan la imagen de plantas floreciendo.

En los conjuntos tipo Mandelbrot las espirales crecen en un vano intento de llegar a tocarse unas a otras.

Por su parte, los conjuntos de Julia, se asemejan a una jardinera de plantas estirándose y compitiendo por recibir el calor del Sol.

48

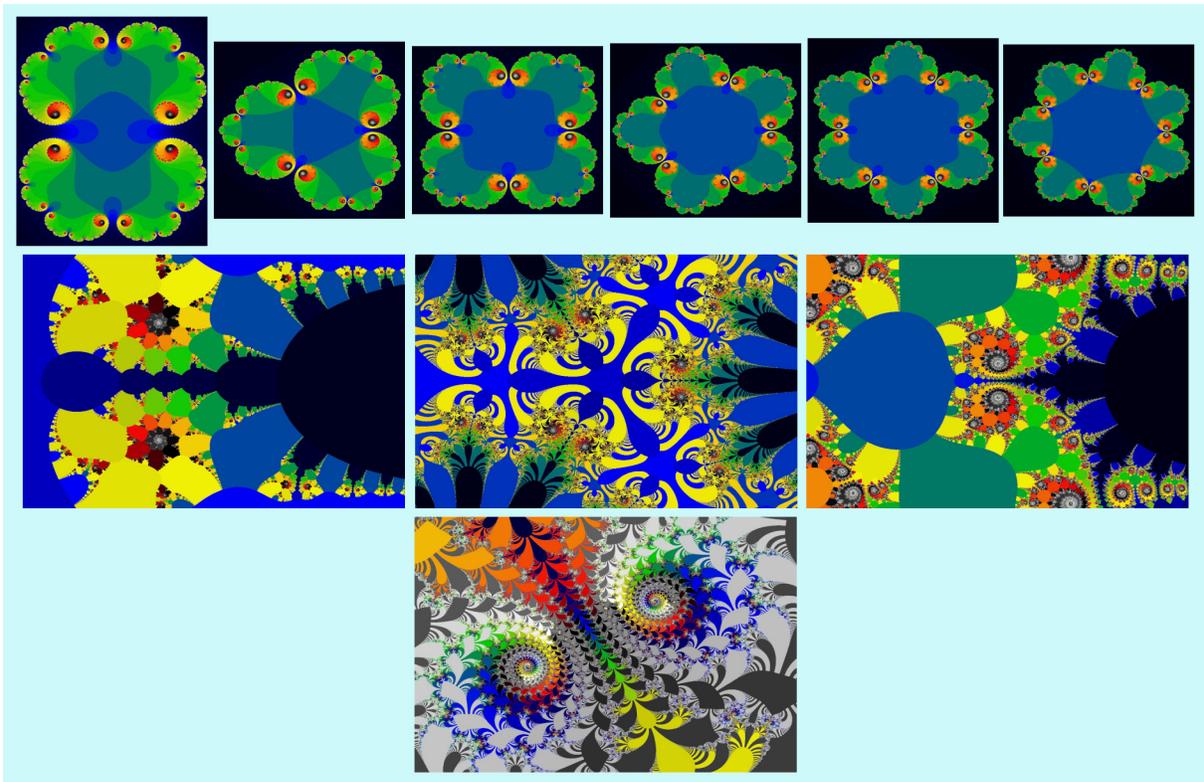


Fig. 18. Un pequeño grupo del conjunto de Julia.

13. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La simetría de escala fue siempre desdeñada por su aparente simplicidad. Uno de los autores (Fernández B.) al inicio de la década del setenta del siglo 20, en su tesis de maestría, señalaba que, buscando la formalización de la causalidad dentro de todo el espacio Minkowski a través del teorema de Zeemann, encontraba que algunas de las simetrías del espacio, plasmadas en invariancia de escala, no parecían conservar la causalidad y dirigía la atención hacia el grupo conforme y las funciones homogéneas, invariantes por cambio de escala. Posteriormente el grupo de renormalización, brillantemente tratado por Veltmann y t'Hoff vino a traer al tapete la importancia que tiene, en Física de partículas, las transiciones de fase y con ello la simetría de escala. Gellmann supo unir ese resultado con los trabajos de Fisher et al. en la rama de transiciones de fases (Termodinámica, rama también desdeñada, pero por su complejidad) y asociar los mecanismos de reducción de los grados de libertad con los cambios de escala. Por su parte Mandelbrot realiza una genial aproximación entre cambio de escala y geometría fractal. En Matemática, René Thom, de la Universidad de Estrasburgo, creó una singular rama llamada teoría de catástrofes, que vienen a ser, junto con las teorías físicas actuales sobre caos, la rama de las ciencias de la no linealidad. Los comportamientos caóticos son invariantes de escala. Eso crea puntos comunes entre esas distintas ramas del saber que nos permiten a nosotros mejor entender los conceptos de simetrías, medición, etc. El estudio del punto crítico de los fluidos en las transiciones de fase nos lleva a un mundo que abre una gran gama de interrogantes que generarán estudios posteriores que a su vez retroalimentará la Física de partículas, la Matemática, etc.

49

Mas aún, la rama de la didáctica se ha enriquecido de una manera asombrosa con estos resultados. Los profesores de escuela media y universitaria aprenderían mucho de estas áreas para mejorar sus modelos explicativos de los fenómenos de la vida diaria. Por ejemplo, el concepto de medir nos lleva a un mundo desde lo simple a lo complejo, en el cual se parte de la simple definición de comparar con un patrón hasta modificarla para definirla como la búsqueda de un invariante numérico como lo es el exponente crítico o dimensión fractal, pues como mencionamos si se nos presenta un ente con una geometría compleja ya la definición inicial no es funcional.

Igualmente ocurre con los cursos de Termodinámica y Física Estadística (de lo global a lo individual o viceversa) que no deben desdeñar los aportes de los nuevos conocimientos para realizar una mejor aproximación didáctica. Los constantes descubrimientos deben



canalizarse para presentar una constante renovación, y lograr avanzar hacia conceptos más elaborados en un corto tiempo.

De esta manera hacemos énfasis en la necesidad de una constante actualización de los cursos de la carrera de la Escuela de Física y así no sentirnos tan lejos de lo que se hace en los centros mundiales de excelencia.

14. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Fernández, B. y Pérez. O. 2001. La medición como tarea básica. Universidad de Panamá.
2. Fernández. B. 1972. Transformaciones conformes y sistemas acelerados, tesis. Centre de Recherches Nucléaires, Strasbourg-Kronembourg, Francia.
3. Wylen, J., y Sonntag, G. 1991. Introducción a la Termodinámica clásica y estadística, Traducción Francisco Paniagua, Editorial Limusa, México.
4. Fernández. B. 1988. Folleto de introducción al grupo de renormalización, “*Las transiciones de fase*”, Universidad de Panamá.
5. Concepción. O. 1988. Módulo de transiciones de fase, “*Transiciones de fase*”, Universidad de Panamá.
6. Askeland. D. 1987. La Ciencia e ingeniería de los materiales, Traducción J. Gonzalo Guerrero, Grupo editorial Iberoamericana. México.
7. Callen., H. B. 1981. Termodinámica, Traducción: M. Z. Carranza, Editorial AC, España.
8. Swalin., R.A. 1962, 1972. Thermodynamics of solids, John Wiley and Sons.
9. Gleick., J. 1987. Chaos-Making a New Science, Traducción del inglés, J. A. Gutiérrez-Larraya, primera edición, Editorial Seix Barral, S.A, impreso en España.
10. Zemansky, M. W., y Dittman, R. 1979. Heat and Thermodynamics, Editorial McGraw-Hill Book Company, Inc.
11. Zeeman, E.C. 1964. Causality Implies the Lorentz Group. J. Math. Phys. 5, 490 (1964); doi: 10.1063/1.1704140. View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1704140>. En: <https://download.wpssoftware.net/causality-lorentz-group-zeeman.pdf>

51

Procedencia de las ilustraciones:

1. Enciclopedia Encarta 98, Fractales.
2. Zemansky, M. W., and Dittman, R. 1979. Heat and Thermodynamics, Editorial McGraw-Hill Book Company, Inc; 1979. Pág. 336-337.
3. Callen, H. B. 1981. Termodinámica, Traducción: M. Z. Carranza, Editorial AC. España. Pág. 162.
4. Concepción. O. 1988. Módulo de transiciones de fase, “*Transiciones de fase*”, Universidad de Panamá.



Sitios de internet utilizados:

1. Fractales. Conjuntos de Mandelbrot y Julia. [http:// www.iec.csic.es/~gonzalo/Caos/default.html](http://www.iec.csic.es/~gonzalo/Caos/default.html)
2. Fractales- Matemática de Belleza infinita. [http:// www.geocities.com/capecanaveral/coc-kpit/5889/](http://www.geocities.com/capecanaveral/coc-kpit/5889/)
3. De Christophe Dang Ngoc Chan (cdang) - Trabajo propio, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=905182>
4. De Josep m batlle2 - Trabajo propio, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17819301>



Fundamentos de la Física - Cuaderno 4

